ارزیابی پایداری و رفتار ارتعاشی ستون‌های ترک‌دار تحت بارگذاری محوری★

مسعود قادری[۱] حسین غفارزاده[۲] وحید عرب‌ملکی[۳]

چکیده *در تحقیق حاضر روش تحلیلی جدیدی به‌منظور بررسی اثر ترک بر رفتار ارتعاشی و پایداری ستون‌های ترک‌دار تحت نیروی محوری ارائه شده است. به‌کمک تعریف انعطاف‌پذیری موضعی، ترک با یک فنر پیچشی مدل شده است که دو قسمت سالم ستون را در محل ترک به یکدیگر متصل می‌سازد. پس از استخراج مسأله مقدار ویژه‌ی متناظر به بررسی تأثیر ترک و نیروی محوری بر فرکانس‌های طبیعی و ظرفیت باربری ستون‌های ترک‌دار با انواع شرایط مرزی مختلف پرداخته شده است. مقایسه‌ی نتایج مدل ارائه شده با نتایج تجربی موجود در ادبیات فن نشان می‌دهد که مدل جدید ارائه شده در ضمن سادگی، با دقت مناسبی رفتار ارتعاشی و ظرفیت باربری ستون‌های ترک‌دار را پیش‌بینی می‌کند. محاسبه‌ی ظرفیت باربری و فرکانس‌های طبیعی ستون ترک‌دار و مطالعه‌ی تغییرات آن نسبت به موقعیت و عمق ترک نشان می‌دهد که در حالت کلی وجود ترک باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی و ظرفیت باربری ستون می‌شود که میزان این کاهش به موقعیت و عمق ترک بستگی دارد. هم‌چنین بار محوری کششی باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی و بار محوری فشاری باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود طوری که با افزایش بار محوری فشاری، فرکانس طبیعی اول کاهش می‌یابد تا در بار کمانش مقدار آن به صفر می‌رسد و سیستم ناپایدار می‌شود.*

واژه‌های کلیدی تحلیل ارتعاشی، ستون ترک‌دار، فرکانس طبیعی، نیروی محوری، بار کمانش.

Stability and Vibration Analysis of Cracked Columns under Compressive axial Load

M. Ghaderi H. Ghaffarzadeh V. A. Maleki

Abstract *In this paper, a new analytical method is proposed to study the effect of crack and axial load on vibration behavior and stability of the cracked columns. Using the local flexibility model, the crack has been simulated by a torsional spring with connecting two segments of column in crack location. By solving governing eigenvalue equation, the effect of crack parameters and axial load on the natural frequencies and buckling load as well as buckling load are investigated. The results show that the presents of crack cause to reduction in natural frequencies and buckling load whereas this reduction is affected by the location and depth of the crack. Furthermore, the tensiel and compressive axial load increase and decrease the natural frequencies, respectively. In addition, as the compression load approaches to certain value, the fundamental natural frequency reaches zero and instability occurs. The accuracy of the model is validated through the experimental data reported in the literature.*

Keywords Vibration Analysis, Crcked Column, Natural Frequency, Axial Load, Buckling Load.

★ تاریخ دریافت مقاله ۹۱/۹/۱۰ و تاریخ پذیرش آن ۹۳/۵/۱ می‌باشد.

(۱) مربی گروه مهندسی عمران، واحد گرمی، دانشگاه آزاد اسلامی گرمی.

(۲) دانشیار گروه عمران، دانشکده‌ی عمران، دانشگاه تبریز.

(۳) نویسنده‌ی مسئول، دانشجوی دکتری، دانشکده‌ی فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز.

مقدمه

سازه‌ها در طول عمر مفید خود دچار تغییرات مختلفی از قبیل ایجاد و گسترش ترک، فرسودگی، خوردگی و یا سایر آسیب‌های احتمالی می‌شوند که تأثیر این عوامل بر روی ظرفیت باربری و به‌طور کلی ایمنی سازه باید به‌نحو قابل‌قبولی در طراحی آن در نظر گرفته شود. وجود ترک در سازه‌ها می‌تواند رفتار مکانیکی و دینامیکی آن را تحت تأثیر قرار دهد و موجب کاهش قابل‌ملاحظه‌ای در ظرفیت باربری و مقاومت نهایی آن شود. از سازه‌های مهمی که وجود ترک رفتار آنها را تحت تأثیر قرار می‌دهد ستون‌های تحت بارگذاری محوری می‌باشند که وجود هرگونه عیب در این سازه‌ها باعث تغییر در رفتار سازه و پایداری آن می‌گردد و اگر به‌موقع تشخیص داده نشود می‌تواند منجر به خرابی و خسارات فاجعه‌باری شود.

ترک در ستون‌ها ممکن است به دنبال وجود ناخالصی در ستون، در اثر ضربه، بارهای سیکلی وارد بر ستون، ارتعاش‌ها، بارهای آیرودینامیکی و مانند آن ایجاد شود. آن‌چه مشخص است این است که وجود ترک‌ها، پیوستگی سازه را از بین می‌برد و سبب ضعیف شدن ستون و کاهش میزان باربری آن می‌شود. تحقیقات متعددی در زمینه‌ی بررسی پایداری و تعیین میزان بار بحرانی کمانش [1-7] و هم‌چنین پاسخ دینامیکی ستون‌های ترک‌دار [8-14] صورت پذیرفته است. کیسا [15] با استفاده از روش المان محدود به بررسی رفتار ارتعاشی و پایداری تیرهای ترک‌دار تحت بار محوری پرداخته است. او ترک را با استفاده از فنر پیچشی مدل نموده و سپس تحلیل پایداری را به‌منظور محاسبه بار بحرانی کمانش انجام داده است. گادمی و همکاران [16] به بررسی رفتار ارتعاشی تیر اویلر- برنولی ترک‌دار تحت اثر نیروی محوری پرداخته است. در تحقیق آنها ترک به‌صورت لبه‌باز فرض شده و اثر آن با استفاده از تابع دلتای دیراک در معادله‌ی حرکت اعمال شده است. جنا و همکاران [17] اثر ترک بر رفتار ارتعاشی تیرهای ترک‌دار را مورد بررسی قرار داده‌اند. یزدهی و همکاران [18] با استفاده از روش ماتریس انتقال به محاسبه‌ی بار کمانش ستون‌های ترک‌دار با سطح مقطع‌های مختلف پرداخته‌اند. نتایج مطالعات آنها نشان می‌دهد که با افزایش عمق ترک، بار بحرانی کمانش ستون‌ها کاهش می‌یابد. رنجبران و همکاران [19] به بررسی کمانش و ارتعاشات آزاد تیر با سطح مقطع متغیر و ترک خورده پرداخته‌اند. آنها با استفاده از روش حساب تغییرات، مسأله را به‌صورت یک مسأله‌ی بهینه‌سازی مدل نموده و سپس به بررسی اثر پارامترهای ترک بر رفتار ارتعاشی تیرهای ترک‌دار پرداخته‌اند. تویگر و همکاران [20] با استفاده از تست‌های تجربی و روش المان محدود به بررسی تأثیر ترک بر بار بحرانی کمانش تیرهای کامپوزیتی پرداخته‌اند. بینیک [21] ارتعاشات عرضی تیر اویلر- برنولی ترک‌دار تحت تأثیر نیروی محوری را مورد مطالعه قرار داده است. نتایج تحقیق نشان می‌دهد که بارهای فشاری که تا ۳۰٪ بار کمانش هستند، می‌توانند اولین فرکانس طبیعی را تا ۱۵٪ تغییر دهند که این اثر در سایر فرکانس‌ها کمتر می‌باشد. اوکامورا [22] نیز تحقیقاتی روی ستون‌های باریک با یک ترک، به‌منظور تعیین ظرفیت باربری ستون و میزان بار شکست ستون انجام داد.

هر چند در بسیاری از تحقیقات انجام شده در این زمینه به بررسی اثر پارامترهای ترک بر رفتار ارتعاشی و پایداری تیرها و ستون‌های ترک‌دار تحت اثر نیروی محوری [15-18] و نیز در غیاب نیروی محوری [9-13] پرداخته شده است، اما عمده‌ی تحقیقات انجام شده در این زمینه عمدتاً براساس روش‌های عددی از قبیل روش ماتریس انتقال [2] روش المان محدود [3,4] بوده است که سبب بروز خطای زیادی در محاسبات می‌گردد و با استفاده از این روش‌ها به‌سهولت نمی‌توان برای ترک‌یابی در ستون‌ها و بررسی اثر پارامترهای مختلف استفاده نمود.

در تحقیق حاضر، روش تحلیلی جدیدی به‌منظور مطالعه‌ی رفتار ارتعاشی و بار بحرانی کمانش

ستون‌های ترک‌دار تحت تأثیر نیروی محوری ارائه شده است. ترک با استفاده از فنر پیچشی که دو قسمت سالم ستون را در محل ترک به یکدیگر متصل می‌سازد، مدل شده است. با استفاده از تئوری مکانیک شکست، سفتی معادل فنر پیچشی به‌صورت تابعی بر حسب عمق ترک استخراج شده است. معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر رفتار ارتعاش عرضی ستون تحت تأثیر نیروی محوری به‌همراه شرایط مرزی متناظر با استفاده از اصل همیلتون استخراج گردیده است. پس از اعمال شرایط مرزی و بین مرزی در محل ترک به معادله‌ی حرکت، مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی متناظر به‌دست آمده و سپس به بررسی اثر پارامترهای ترک بر رفتار ارتعاشی و بار بحرانی ستون ترک‌دار به‌ازای شرایط مرزی مختلف پرداخته شده است. مقایسه بین نتایج حاصل از مدل ارائه شده با نتایج تجربی موجود در ادبیات فن، علاوه بر صحه‌گذاری بر مدل جدید ارائه شده نشان می‌دهد که مدل جدید ضمن سادگی، با دقت مناسبی رفتار ارتعاشی و پایداری ستون‌های ترک‌دار تحت بار محوری را به‌ازای بازه‌ی گسترده‌ای از پارامترهای ترک و نیروی محوری پیش‌بینی می‌کند.

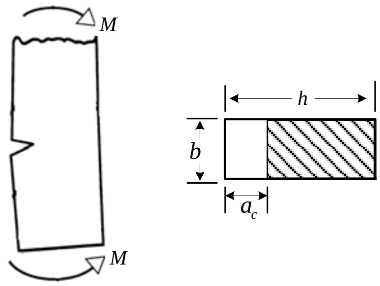
انعطاف‌پذیری موضعی در ستون ناشی از ترک

در شکل (۱) مقطعی از یک ستون دارای یک ترک لبه‌ی باز با طول ثابت نشان داده شده است. روش معمول برای اعمال اثر ترک در رفتار ستون، مدل انعطاف‌پذیری موضعی است که در آن ترک با استفاده از فنر پیچشی بدون جرم مدل می‌شود و سفتی معادل فنر از تئوری مکانیک شکست به‌دست می‌آید. انرژی کرنشی اضافی ناشی از حضور ترک برحسب ضریب انعطاف‌پذیری موضعی که تابعی از ضریب شدت تنش است بیان می‌شود. ضریب انعطاف‌پذیری موضعی برای ترک با پهنای b و عمق a_c نشان داده شده در شکل (۱) را می‌توان با استفاده از قضیه‌ی کاستیگلیانو به‌صورت زیر به‌دست آورد [23]:

$$C=\frac{\partial u}{\partial M}=\frac{\partial^2}{\partial M^2}\int_0^b\int_0^{a_c} J(\alpha)d\alpha d\zeta \qquad (۱)$$

در رابطه‌ی اخیر، M گشتاور اعمالی، $J(\alpha)$ تابع چگالی انرژی کرنشی است که به‌صورت زیر بیان می‌شود [23]:

$$J(\alpha)=\frac{1-\nu^2}{E}K_I^2(\alpha) \qquad (۲)$$



شکل ۱ ستون ترک‌دار با سطح مقطع مستطیلی

که در آن $K_I(\alpha)$ ضریب شدت تنش در مود اول شکست متناظر با گشتاور خمشی M می‌باشد که برای سطح مقطع مستطیلی به‌صورت زیر می‌باشد [24]:

$$K_I(a_c)=\frac{Mh}{2I_o}\sqrt{\pi a_c}F\left(\frac{a_c}{h}\right) \qquad (۳)$$

در رابطه‌ی اخیر، h ارتفاع و I_o ممان اینرسی سطح مقطع ستون می‌باشد. برای سطح مقطع مستطیلی تابع $F(\frac{a_c}{h})$ را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد [24]:

$$F(\frac{a_c}{h})=1.93-3.07(\frac{a_c}{h})+14.53(\frac{a_c}{h})^2 -25.11(\frac{a_c}{h})^3+25.080(\frac{a_c}{h})^4 \qquad (٤)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۲) و (۳) در معادله‌ی (۱) و انتگرال‌گیری در سطح مقطع ترک‌دار ستون، ضریب انعطاف‌پذیری موضعی C برای مود اول بارگذاری که متناظر با گشتاور خمشی خالص است به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

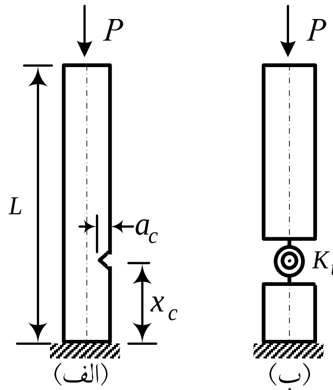
$$C=\frac{b(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2}{\partial M^2}\int_0^{a_c} K_I^2(\alpha)d\alpha \qquad (۵)$$

اگر K_t سفتی فنر پیچشی معادل با ترک به عمق a_c باشد، در این‌صورت با استفاده از رابطه‌ی (۵) می‌توان آن را به‌صورت زیر به‌دست آورد [22]:

$$K_t = \frac{1}{C} \qquad (٦)$$

ارتعاش ستون ترک‌دار تحت نیروی محوری

در شکل (۲) ستون اویلر- برنولی ترک‌دار که تحت تأثیر نیروی ثابت محوری قرار دارد به‌همراه مدل ریاضی مورد استفاده نشان داده شده است. ترک در موقعیت x_c قرار گرفته و اثر آن با استفاده از فنر پیچشی که دو قسمت سالم را در محل ترک به یکدیگر متصل می‌سازد مدل شده است (شکل ۲- ب).



شکل ۲ الف) ستون ترک‌دار، ب) مدل ریاضی ستون ترک‌دار

با استفاده از اصل همیلتون و فرضیات تئوری تیر اویلر- برنولی، معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر رفتار ارتعاش عرضی هر یک از دو قسمت سالم ستون را می‌توان به‌صورت زیر استخراج کرد:

$$EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + P\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \rho A\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (٧)$$

که در آن، EI صلبیت خمشی لوله، P نیروی محوری فشاری و ρA جرم واحد طول ستون می‌باشد. برای استفاده از مدل فنر پیچشی، ابتدا می‌بایست جواب تحلیلی معادله‌ی فوق را به‌دست آورد. حل هارمونیک معادله‌ی حرکت (٧) به‌صورت $y(x,t) = Y(x)e^{i\omega t}$، در نظر گرفته می‌شود. با جای‌گذاری رابطه‌ی اخیر در معادله‌ی (٧)، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$EI\frac{d^4Y(x)}{dx^4} + P\frac{d^2Y(x)}{dx^2} - \rho A\omega^2 Y(x) = 0 \qquad (٨)$$

در رابطه‌ی اخیر، ω فرکانس طبیعی ستون سالم تحت نیروی محوری می‌باشد. معادله‌ی فوق، معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه چهار با ضرایب ثابت می‌باشد. برای حل معادله‌ی اخیر، جواب معادله را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$Y(x) = A_1\sin(\frac{\zeta x}{L}) + A_2\cosh(\frac{\zeta x}{L}) + A_3\sinh(\frac{\eta x}{L}) + A_4\cosh(\frac{\eta x}{L}) \qquad (٩)$$

که در آن ضرایب $A_i, i = 1,2,3,4$ ثابت‌های مجهولی هستند که از اعمال شرایط مرزی و بین‌مرزی در محل ترک به‌دست می‌آیند. ζ و η پارامترهای بی‌بُعدی هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\zeta = \sqrt{-\left(\frac{PL^2}{2EI}\right) + \sqrt{\left(\frac{PL^2}{2EI}\right)^2 + \left(\frac{\rho A}{EI}\right)\left(\omega L^2\right)^2}} \qquad (١٠)$$

$$\eta = \sqrt{\left(\frac{PL^2}{2EI}\right) + \sqrt{\left(\frac{PL^2}{2EI}\right)^2 + \left(\frac{\rho A}{EI}\right)\left(\omega L^2\right)^2}} \qquad (١١)$$

با تعریف $\phi = PL^2/2EI$ و $\psi = \sqrt{(\rho A/EI)}\omega L^2$ روابط اخیر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\zeta = \sqrt{-\phi + \sqrt{\phi^2 + \psi^2}} \text{ و } \eta = \sqrt{\phi + \sqrt{\phi^2 + \psi^2}} \qquad (١٢)$$

حل معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر ستون دارای ترک

برای استخراج معادله‌ی فرکانسی ارتعاشات عرضی ستون ترک‌دار تحت نیروی محوری، مدل ریاضی ستون ترک‌دار را که در شکل (۲- ب) نشان داده شده است در نظر می‌گیریم. با استفاده از رابطه‌ی (۹)، جواب معادله‌ی (٦) برای دو قسمت سالم ستون در

طرفین ترک را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$Y_L(x) = B_1 \sin(\frac{\zeta x}{L}) + B_2 \cosh(\frac{\zeta x}{L}) + B_3 \sinh(\frac{\eta x}{L}) + B_4 \cosh(\frac{\eta x}{L}) \quad (۱۳)$$

$$Y_R(x) = B_5 \sin(\frac{\zeta x}{L}) + B_6 \cosh(\frac{\zeta x}{L}) + B_7 \sinh(\frac{\eta x}{L}) + B_8 \cosh(\frac{\eta x}{L}) \quad (۱۴)$$

شکل مودهای ارتعاشی سیستم (روابط ۱۳ و ۱٤) دارای هشت مجهول $B_i, i = 1,2,...,8$ می‌باشد که از اعمال شرایط مرزی و شرایط بین مرزی در موقعیت ترک تعیین می‌شوند. شرایط بین مرزی حاکم در موقعیت $x = x_c$ از شرایط پیوستگی خیز، گشتاور، نیروی برشی و اختلاف شیب در طرفین ترک حاصل می‌شوند که به‌ترتیب عبارتند از:

$$Y_L(x_c) = Y_R(x_c), \quad Y_L''(x_c) = Y_R''(x_c),$$
$$Y_L'''(x_c) + \frac{2\phi}{L} Y_L'(x_c) = Y_R'''(x_c) + \frac{2\phi}{L} Y_R'(x_c),$$
$$K_t Y_L'(x_c) - K_t Y_R'(x_c) = EI\, Y_R''(x_c) \quad (۱۵)$$

مدل تحلیلی ارائه شده را می‌توان برای انواع شرایط مرزی اعمال کرد. بنابراین در تحقیق حاضر شرایط مرزی استاندارد (دوسر لولا، یکسر گیردار، یکسرگیردار- یکسر لولا و دوسرگیردار) مورد بررسی قرار می‌گیرد. در جدول (۱) شرایط مرزی حاکم بر شرایط مرزی مذکور آورده شده است.

جدول ۱ شرایط مرزی حاکم بر تکیه‌گاه‌های استاندارد

نوع تکیه‌گاه	شرایط مرزی
لولایی	$Y(0) = 0, \quad Y''(0) = 0$
گیردار	$Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0$
آزاد	$Y'''(0) + \frac{2\phi}{L} Y'(0) = 0$

کمانش ستون دارای ترک تحت نیروی محوری

در حالت استاتیکی، معادله‌ی حاکم بر خیز ستون ترک‌دار تحت نیروی محوری را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی (۸) به‌صورت زیر بیان نمود:

$$EI \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} + P \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} = 0 \quad (۱٦)$$

پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل اخیر را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$Y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sinh(\frac{\eta x}{L}) + C_4 \cosh(\frac{\eta x}{L}) \quad (۱۷)$$

با توجه به رابطه‌ی اخیر، پاسخ حاکم بر دو قسمت سالم ستون در طرفین ترک به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$Y_L(x) = D_1 + D_2 x + D_3 \sinh(\frac{\eta x}{L}) + D_4 \cosh(\frac{\eta x}{L}) \quad (۱۸)$$

$$Y_R(x) = D_5 + D_6 x + D_7 \sinh(\frac{\eta x}{L}) + D_8 \cosh(\frac{\eta x}{L}) \quad (۱۹)$$

معادلات اخیر دارای هشت مجهول $D_i, i = 1,2,...,8$ می‌باشد که از اعمال شرایط مرزی و شرایط بین مرزی در موقعیت ترک تعیین می‌شوند.

برای استخراج مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی متناظر با ارتعاشات عرضی و کمانش ستون ترک‌دار با جای‌گذاری روابط به‌دست آمده برای دو قسمت سالم ستون در شرایط پیوستگی رابطه‌ی (۱۵) و پس از اعمال شرایط مرزی، هشت معادله‌ی جبری برحسب ضرایب مجهول $B = \{B_i\}$ و یا $D = \{D_i\}, \ i = 1,...,8$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$[\Delta]\{B\} = 0 \quad (۲۰)$$

$$[\Delta]\{D\} = 0 \quad (۲۱)$$

در روابط اخیر، عناصر ماتریس ضرایب $[\Delta]$ به مشخصات هندسی، مکانیکی، شرایط مرزی، پارامترهای ترک و نیروی محوری بستگی دارد. برای داشتن جواب غیربدیهی، بایستی دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد. بنابراین، مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی حاکم بر ستون ترک‌دار تحت نیروی محوری به‌صورت

زیر به‌دست می‌آید:

$$\det\left[\Delta\left(K_t, x_c, P, \omega\right)\right] = 0 \quad (۲۲)$$

از حل معادله‌ی اخیر، فرکانس‌های طبیعی ستون ترک‌دار و هم‌چنین با مدنظر قرار دادن حالت استاتیکی (رابطه‌ی ۲۱) بار بحرانی کمانش ستون ترک‌دار به‌دست می‌آید.

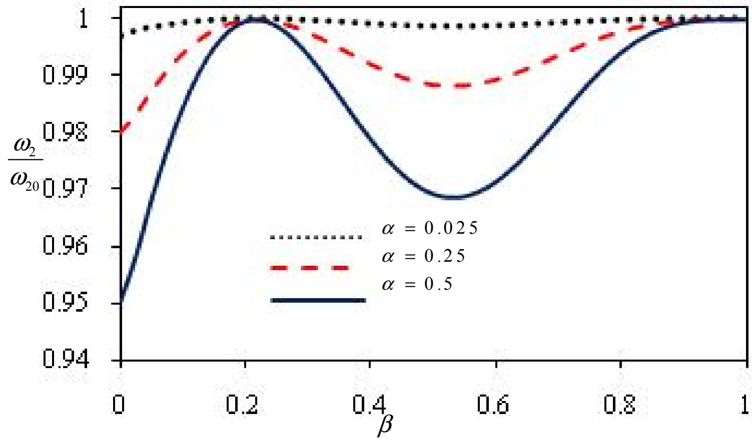
نتایج تحلیلی

به‌منظور تصدیق مدل در نظر گرفته شده از نتایج تست‌های تجربی مرجع [25] استفاده شده است. در مرجع مذکور آزمایش‌ها بر روی تیر یکسر گیردار ترک‌دار در غیاب نیروی محوری و به طول $l = 820$ mm، عرض $b = 20$ mm، ارتفاع $h = 10$ mm، مدول الاستیسیته $E = 70$ GPa و چگالی $\rho = 2700$ Kg / m^3 انجام شده است. در جدول (۲) مقایسه بین نتایج حاصل از تست‌های تجربی مرجع [25] بر روی ستون یک‌سرگیردار ترک‌دار در غیاب نیروی محوری، با نتایج مدل ارائه‌شده به‌ازای پارامترهای مختلف ترک آورده شده است. نتایج نشان می‌دهد که حداکثر خطای مدل ارائه‌شده در تعیین فرکانس‌های طبیعی اول، دوم و سوم به‌ترتیب ۰/۹۵٪، ۰/۹۰٪ و ۰/۷٤٪ می‌باشد بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مدل ارائه شده با دقت بسیار مناسبی رفتار ارتعاشی ستون‌های ترک‌دار را پیش‌بینی می‌کند.

در شکل (۳) منحنی تغییرات نسبت فرکانسی دوم ستون ترک‌دار (نسبت فرکانس ستون ترک‌دار به فرکانس ستون سالم متناظر) برحسب موقعیت نسبی ترک نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که در شکل مود دوم ارتعاشی، کمترین کاهش فرکانس طبیعی دوم مربوط به ترک واقع در موقعیت نسبی $\beta = x_c / L = 0.2$ می‌باشد. همان‌طور که در شکل ٤ نشان داده شده است موقعیت مزبور نقاط عطف تابع شکل مود دوم ارتعاشی است که در این موقعیت‌ها مشتق دوم تابع خیز برابر صفر است. به عبارت دیگر گشتاور خمشی ایجاد شده در نقاط مزبور در طی ارتعاش ستون در مود دوم برابر صفر می‌باشد. با توجه به این‌که عمده‌ترین عامل کاهش فرکانس‌های طبیعی ناشی از ترک، اثر گشتاور خمشی می‌باشد، بنابراین در شکل مود ارتعاشی دوم، اثر ترک واقع در موقعیت‌های نسبی $\beta = 0.2$ بر نسبت کاهش فرکانس طبیعی دوم از بین می‌رود.

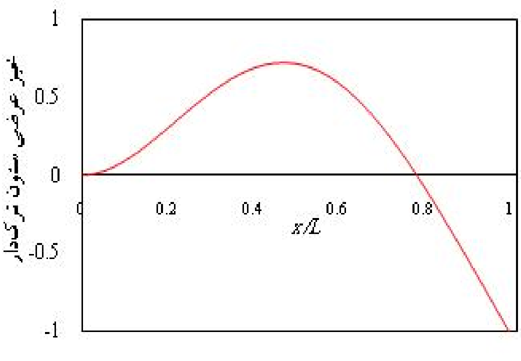
جدول ۲ فرکانس‌های طبیعی ستون یک‌سرگیردار ترک‌دار و مقایسه‌ی آن با نتایج تجربی [25] به‌ازای پارامترهای مختلف ترک

پارامترهای ترک، mm		سفتی پیچشی فنر	فرکانس‌های طبیعی، Hz								
موقعیت ترک	عمق ترک	K_t, KN.m / rad	f_1			f_2			f_3		
			Exp. [25]	Pressent	Error %	Exp. [25]	Pressent	Error %	Exp. [25]	Pressent	Error%
30	1	99.42	11.49	11.58	0.73	72.11	72.60	0.69	201.99	203.3	0.68
30	2	24.88	11.47	11.50	0.23	72.04	72.23	0.27	201.92	202.6	0.34
600	1	99.42	11.51	11.60	0.83	72.11	72.69	0.81	201.98	203.5	0.74
600	2	24.88	11.49	11.60	0.95	71.93	72.57	0.90	201.73	203.0	0.63

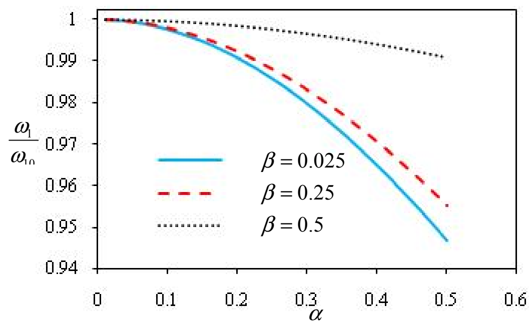


شکل ۳ منحنی تغییرات نسبت فرکانسی در مود دوم برحسب موقعیت نسبی ترک به‌ازای عمق‌های نسبی مختلف ترک

در شکل (۵) منحنی نسبت فرکانسی در مود اول ارتعاشی بر حسب عمق نسبی ترک (نسبت عمق ترک به ضخامت) و به‌ازای مقادیر مختلف موقعیت نسبی ترک رسم شده است. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود وجود ترک باعث افت فرکانس طبیعی می‌شود که میزان این کاهش با عمق ترک رابطه‌ی مستقیمی دارد. با افزایش عمق ترک و در نتیجه افزایش انعطاف‌پذیری موضعی ستون در مقطعی که ترک در آن قرار دارد، کاهش فرکانس‌های طبیعی نیز بیشتر می‌شود. همچنین نتایج نشان می‌دهد که هر چه ترک به تکیه‌گاه گیردار نزدیک باشد اثر آن بر کاهش فرکانسی بیشتر خواهد بود.

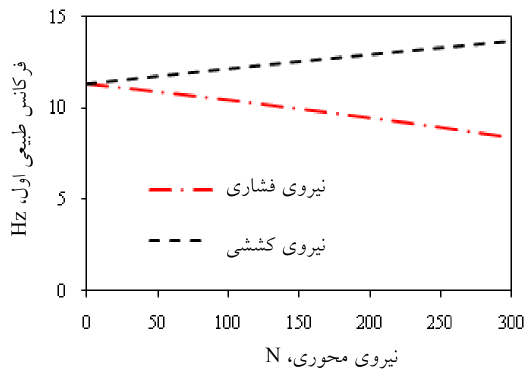


شکل ٤ شکل مود دوم ارتعاشی ستون یکسرگیردار ترک‌دار بر حسب طول نسبی



شکل ٥ منحنی تغییرات نسبت فرکانسی اول برحسب عمق نسبی ترک به‌ازای موقعیت‌های نسبی مختلف ترک

همان‌طور که از معادله‌ی فرکانسی (۲۲) مشاهده می‌شود، فرکانس‌های طبیعی ستون ترک‌دار وابسته به نیروی محوری نیز می‌باشد. شکل (٦) منحنی تغییرات نسبت فرکانسی اول ستون ترک‌دار تحت نیروی محوری را برحسب اندازه‌ی بار محوری برای دو حالت بارگذاری فشاری و کششی نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد که نیروی کششی باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌شود. همچنین نیروی فشاری باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌گردد، به‌طوری که با افزایش میزان نیروی فشاری فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند تا در بار کمانش، فرکانس طبیعی اول برابر صفر می‌شود و سیستم ناپایدار می‌گردد.

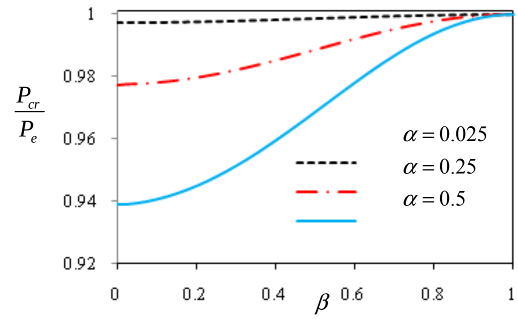


شکل ٦ تغییرات نسبت فرکانسی اول برحسب نیروی محوری

از مزیت‌های دیگر مدل ارائه شده امکان محاسبه‌ی بار کمانش ستون‌های ترک‌دار می‌باشد. برای ستون سالم، بار کمانش با استفاده از فرمول اویلر به‌صورت زیر محاسبه می‌شود [27]:

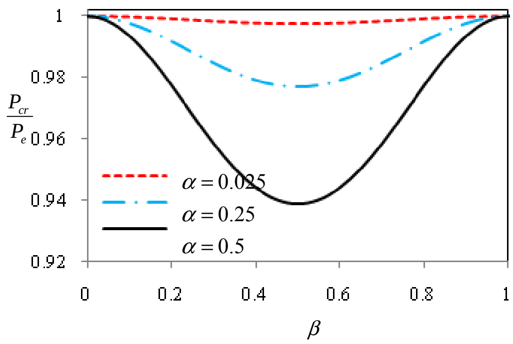
$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (۲۳)$$

که در آن، K ضریب تکیه‌گاه می‌باشد. برای ستون با تکیه‌گاه‌های یکسرگیردار- یکسر آزاد، دوسر لولا، یکسرگیردار- یکسر لولا و دوسر گیردار مقدار این ضریب به‌ترتیب برابر با 2، 1، 0.7 و 0.5 می‌باشد [26]. با استفاده از معادله‌ی مقدار ویژه‌ی (۲۱) می‌توان بار کمانش ستون‌های ترک‌دار را محاسبه نمود. تغییرات بار کمانش بی‌بُعد ستون ترک‌دار یکسرگیردار نسبت به موقعیت نسبی ترک و به‌ازای عمق‌های نسبی مختلف ترک در شکل (۷) نشان داده شده است. P_{cr} و P_e به‌ترتیب بار کمانش ستون ترک‌دار و سالم را نشان می‌دهند. نتایج نشان می‌دهد که وجود ترک باعث کاهش بار کمانش و ظرفیت باربری ستون می‌شود. به‌عنوان نمونه برای ستون سالم یکسرگیردار مورد بررسی بار کمانش مطابق رابطه‌ی اویلر برابر $P_e = 3.67EI$ می‌باشد و برای ستون ترک‌دار با عمق نسبی 0.6 و در موقعیت نسبی 0.001 بار کمانش برابر $P_{cr} = 3.35EI$ به‌دست می‌آید. بنابراین وجود ترک، بار کمانش ستون ترک‌دار نسبت به ستون سالم را به‌اندازه 9.67% کاهش می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که در یک موقعیت ثابت ترک، با افزایش عمق ترک بار کمانش ستون کاهش می‌یابد.

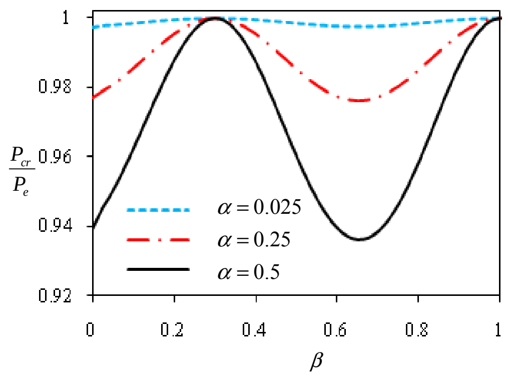


شکل ۷ تغییرات بار کمانش ستون یکسر گیردار ترک‌دار برحسب عمق نسبی ترک

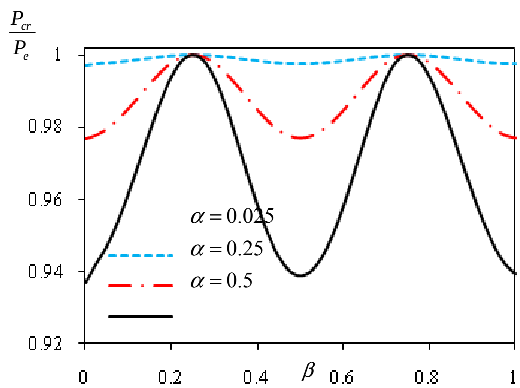
تأثیر موقعیت ترک بر بار کمانش ستون برحسب نوع شرایط مرزی متفاوت می‌باشد. در شکل‌های ۸ تا ۱۰ تغییرات بار کمانش ستون ترک‌دار برای تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها، یکسرگیردار- یکسر لولا، دوسر گیردار بر حسب موقعیت نسبی ترک رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود وجود ترک باعث کاهش بار کمانش ستون می‌شود. با توجه به تئوری مکانیک شکست مشخص است که انرژی کرنشی ذخیره شده تحت گشتاور خمشی تابع مقدار گشتاور اعمال شده می‌باشد. بنابراین برای ترک با عمق ثابت، ترک واقع در موقعیت متناظر با حداکثر گشتاور خمشی بیشترین اثر را بر کاهش بار کمانش و ظرفیت باربری ستون دارد. همچنین ترک واقع در نقاط عطف که گشتاور خمشی در آن برابر صفر می‌باشد، تأثیری بر بار کمانش ستون ترک‌دار ندارد. در مورد تکیه‌گاه‌های گیردار، هرچه موقعیت ترک به تکیه‌گاه نزدیک شود اثر آن بر کاهش بار کمانش بیشتر می‌شود.



شکل ۸ تغییرات بار کمانش ستون ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها بر حسب موقعیت نسبی ترک به ازای عمق‌های نسبی مختلف ترک



شکل ۹ تغییرات بار کمانش ستون یکسرگیردار- یکسر لولا ترک‌دار برحسب موقعیت نسبی ترک به‌ازای عمق‌های نسبی مختلف ترک



شکل ۱۰ تغییرات بار کمانش ستون دو سرگیردار ترک‌دار بر حسب موقعیت نسبی ترک به‌ازای عمق‌های نسبی مختلف ترک

نتیجه گیری

در تحقیق حاضر، روشی تحلیلی بـرای بررسـی رفتـار ارتعاشی و پایداری سـتون‌هـای تـرک‌دار تحـت تـأثیر نیروی محوری ارائه شده اسـت. مـدل ارائـه شـده بـر مبنای مدل‌سازی ترک بـا اسـتفاده از فنـر پیچشـی کـه سفتی معادل آن با استفاده از تئوری مکانیـک شکسـت به‌دست آمده می‌باشد. پس از به‌دست آوردن معادلـه‌ی دیفرانسیل حاکم بر رفتار ارتعاش عرضی ستون تحـت نیروی محوری، با اعمال شرایط مرزی و بین‌مرزی در محل ترک به معادله‌ی حـاکم، مسـألـه‌ی مقـدار ویـژه‌ی متناظر به‌منظور بررسی اثر نیروی محـوری و تـرک بـر مشخصه‌های ارتعاشی و بار کمـانش سـتون اسـتخراج گردیده است. سپس به بررسی اثـر نیـروی محـوری و پارامترهـای تـرک بـر رفتـار ارتعاشـی و بـار کمـانش ستون‌های ترک‌دار پرداختـه شـده اسـت. نتـایج نشـان می‌دهند کـه نیـروی محـوری کششـی باعـث افـزایش فرکانس‌های طبیعی می‌شود. در مقابل نیـروی محـوری فشاری باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی ستون می‌شود و با افـزایش نیـروی محـوری فشـاری، فرکـانس‌هـای طبیعی تا اندازه‌ای کاهش می‌یابند کـه در بـار کمـانش، فرکانس طبیعی اول برابر صفر شده و سیسـتم ناپایـدار می‌شود. هم‌چنین نتایج نشان می‌دهد کـه وجـود تـرک باعث کاهش سفتی موضعی ستون مـی‌شـود و در یـک موقعیت مشخص، ترک با عمق بیشتر تأثیر بیشتری بـر مشخصه‌های ارتعاشی و نیـز بـار کمـانش یـا ظرفیـت باربری ستون نسبت به ترک با عمق کمتر دارد. بـه‌ازای عمـق مشـخص تـرک، موقعیـت تـرک بـر کـاهش فرکانس‌هـای طبیعـی اثـر مـی‌گـذارد. از آن‌جـایی کـه عمده‌ترین عامـل کـاهش فرکانس‌هـای طبیعـی و بـار کمانش ناشی از ترک، در اثر گشتاور خمشی مـی‌باشـد لذا در موقعیت‌هایی که مقدار گشتاور خمشی به صـفر میل می‌کند اثر تـرک بـر فرکـانس‌هـای طبیعـی و بـار کمانش کاهش می‌یابد.

مقایسه‌ی نتایج حل تحلیلی ارائـه شـده بـا نتـایج حاصل از تست‌های تجربی موجود تطابق بسیار خوب دو پاسخ را به‌ازای بازه‌ی گسترده‌ای از پارامترهای ترک نشان می‌دهد.

مراجع

1. Krauberger, N., Bratina, S., Saje, M., Schnabl, S., Planinc, I.; "Inelastic buckling load of a locally weakened reinforced concrete column", Engineering Structures, Vol. 34, pp. 278–288, (2011).
2. Gurel, M., Kisa, M., "Buckling of Slender Prismatic Columns with a Single Edge Crack under Concentric Vertical Loads", *Turkish J. Eng. Env.* Sci., Vol. 29, pp. 185-193, (2005).
3. Jiki, P. N., "A Finite element java program for stability analysis of pre- cracked beam-columns", *Indian J. Edu. Inf. Manage.,* Vol. 1, pp. 49-55, (2012).
4. Jiki, P. N., Karim, U., "A Numerical model for stability of fre-cracked beam-columns", 1st International Technology, *Education and Environment Conference,* (2011).
5. Vadillo, G., Loya, J. A., Fernandez-Saez, J., "First order solutions for the buckling loads of weakened Timoshenko columns", *Comput. Math. Appl.* Vol. 64, pp. 2395-2407, (2012).
6. Nikpour, K., "Buckling of cracked composite columns", *Int. J. Solids Structures,* Vol. 26, pp. 71-86, (1990).
7. Anifantis, N., Dimaragonas, A., "Stability of columns with a single crack subject to follower and vertical loads", *Int. J. Solids Structures,* Vol. 19, pp. 281-291, (1981).
8. Rahai, A.R., Kazemi, S., "Buckling analysis of non-prismatic columns based on modified vibration modes", Commu. Nonlinear Sci. Numer. Simul. Vol. 13, pp. 1721-1735, (2008).
9. Deliang, C., Wenting W., Feng L., "Vibration analysis method of cracked beam based on the principle of energy", Applied Mechanics and Materials Vols. 94-96, pp. 1633-1637, (2011).
10. Guirong, Y., Alessandro, D., Emiliano, M., Ruoqiang, F., "A novel approach to detecting breathing-fatigue cracks based on dynamic characteristics", *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 332, pp. 407–422, (2013).
11. Ma’en, S., Eric A. B., "Natural frequencies and critical loads of beams and columns with damaged boundaries using Chebyshev polynomials", *Int. J. of Engineering Science,* Vol. 48, pp. 862–873, (2010).
12. Gürkan, Ş., Hasan, Ö., Mustafa, S., "Dynamic stability of multi-span frames subjected to periodic loading", *Journal of Constructional Steel Research,* Vol. 70, pp. 65–70, (2012).

13. Seong-Min, K., Yoon-Ho, C., "Vibration and dynamic buckling of shear beam-columns on elastic foundation under moving harmonic loads", *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 43, pp. 393–412, (2006).
14. Jiki, P.N., "Buckling analysis of pre-cracked beam-columns by Liapunov's second method", *European Journal of Mechanics A/Solids,* Vol. 26, pp. 503–518, (2007).
15. Kisa, M., "Vibration and stability of multi-cracked beams under compressive axial loading", *International Journal of the Physical Sciences,* Vol. 6(11), pp. 2681-2696, (2011).
16. Caddemi, S., Caliò, I., "The influence of the axial force on the vibration of the Euler–Bernoulli beam with an arbitrary number of cracks", Arch Appl Mech, Vol. 82, pp., 827–839, (2012).
17. Jena, P. K., Thatoi, D. N., Nanda, J., Parhi, D. R. K., "Effect of damage parameters on vibration signatures of a cantilever beam", Procedia Engineering, Vol. 38, pp. 3318 – 3330, (2012).
18. Yazdchi, K., Gowhari Anaraki, A. R., "Carrying capacity of edge-cracked columns under concentric vertical loads", Acta Mech., Vol. 198, pp. 1–19, (2008).
19. Ranjbaran, A., Hashemi, S., Ghaffarian, A. R., "A new approach for buckling and vibration analysis of cracked column", IJE Transactions A: Basics, Vol. 21, pp. 225-231, (2008).
20. Evren Toygar, M, Kiral, Z., Onur, S., Yusuf, A., "Effect of interface crack on lateral buckling behavior and free vibration response of a sandwich composite beam", *J. of Composite Materials,* Vol. 1, pp. 1-9,(2012).
21. Binici, B., "Vibration of beams with multiple open cracks subjected to axial force", *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 287, pp. 277–295, (2005).
22. Okamura, H., Liu, H. W., Chu, C., Libbowitz, H., "A Cracked column under compression", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 1, pp. 547-564, (1969).
23. Ricci, P., Viola, E., "Stress intensity factors for cracked T-sections and dynamic behaviour of T-beams", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 73, pp. 91–111, (2006).
24. Tada, H., Paris, P., Irwin, G.R., "The Stress Analysis of Cracks Handbook", ASME Press, New York, (2004).
25. Vakil Baghmisheh, M.T., Peimani M., Homayoun Sadeghi, M., Ettefaghb, M.M., Fakheri Tabrizi, A., "A hybrid particle swarm–Nelder–Mead optimization method for crack detection in cantilever beams", Applied Soft. Computing,Vol. 12, pp. 2217–2226, (2012).
26. Surya, N., Patnaik, Dale, A. Hopkins, "Strength of Materials", Elsevier, New York, (2004).